



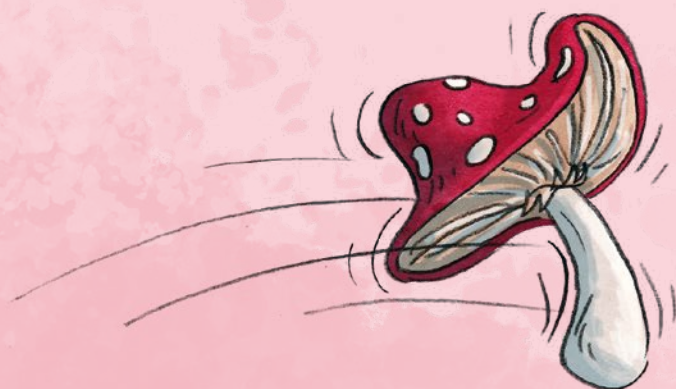
WISKUNDE IS VEEL MEER DAN TELLEN

Wiskunde is belangrijk in onze samenleving. We gebruiken wiskunde als we ingrediënten afwegen tijdens het koken, als we gepast betalen in de winkel of als we inschatten hoever we kunnen rijden met een volle tank. Wiskunde is veel meer dan tellen. Ook in de kleuterklas! Daar zetten kinderen hun eerste stappen in abstract wiskundig denken. Laat je inspireren door de speelse activiteiten met patronen die onderzoekers van de KU Leuven uitwerkten en uitprobeerden. Het tweede artikel zoomt in op wiskunde in het lager onderwijs.

Wiskundedocenten van de lerarenopleiding UCLL verdiepten zich in breuken, leerstof waarmee leerlingen worstelen. Iets leren gaat niet vanzelf. Concrete tips en voorbeelden laten zien hoe je leerlingen helpt om sprongen te maken van “ik kan het niet” naar “ik kan het”.

ILLUSTRATIES
Rutger Van Parys

TEKST
Isabel Rots



Wiskunde in de kleuterklas

Aan de slag met patronen



Sommige kleuters tonen spontaan interesse in patronen. Ze herkennen het patroon op hun T-shirt of ze maken een toren met afwisselend een gele en een blauwe blok. Tussen 3 en 6 jaar ontwikkelen kinderen verschillende vaardigheden om met patronen aan de slag te gaan. Als kleuterjuf of -meester kan je hier op inspelen door vaak en diepgaand rond patronen te werken in de klas, op de speelplaats, in het bos of tijdens de turnles. Er zijn verschillende activiteiten met patronen die speels en aantrekkelijk zijn en waarmee kleuters de eerste stappen zetten tot abstract wiskundig denken.

PATROON, RIJ, REEKS, LOGISCHE REEKS?

Een patroon, wat is dat nu eigenlijk? We kennen en gebruiken het woord allemaal. We gebruiken patronen in verschillende contexten in ons dagelijks leven. Een patroon voor een naaiwerk, een patroon zien in een reeks gebeurtenissen, een patroon op je T-shirt. Ook kleuters komen al in contact met patronen, zoals de dagen van de week of de volgorde van de kleuren van de regenboog. Onderzoek toont dat patroonvaardigheden op kleuterleeftijd belangrijk zijn voor de wiskundige ontwikkeling.

Wij focussen hier op patronen in een wiskundige context op het niveau van het kleuteronderwijs. Een patroon is dan een rij of reeks van elementen die niet zomaar willekeurig is maar waarin regelmaat zit. De regelmaat van het patroon zorgt ervoor dat de rij voorspelbaar is en dat je die kan verderzetten. Een willekeurige rij kan je niet voorspellen. Inzicht in patronen en de regelmaat ervan, vormt de basis voor vele andere regelmatig-

heden in de wiskunde (bv. de telrij, even en oneven getallen, enzovoort).

Je kan dus een onderscheid maken tussen een rij of reeks (die willekeurig kan zijn) en een patroon of logische reeks (waarin regelmaat of iets "logisch" zit). Ook de ontwikkelingsdoelen kleuteronderwijs maken dit onderscheid: "De kleuters kunnen vanuit een patroon een rij of een reeks dingen verderzetten" (O.D. 3.4). De rij of reeks verwijst dus naar de elementen (dingen) en in die elementen zit een patroon. Het patroon zorgt voor regelmaat, daardoor weet je hoe de rij verdergaat en kan je de rij verderzetten.

SOORTEN PATRONEN IN DE KLEUTERKLAS

Er bestaan verschillende soorten patronen die wiskundig relevant zijn en die in de kleuterklas aan bod kunnen komen. Onderzoek verwijst meestal naar drie soorten: herhalende patronen, veranderende patronen en spatiaal structurele patronen (zie figuur).

TEKST

Nore Wijns,
Joke Torbeyns en
Laure De Keyser

Herhalend patroon



Een rij of reeks met een stukje dat altijd herhaalt. Dat stukje wordt de eenheid genoemd.

De eenheid in bovenstaande patronen is geel-blauw-rood en blauw-geel.

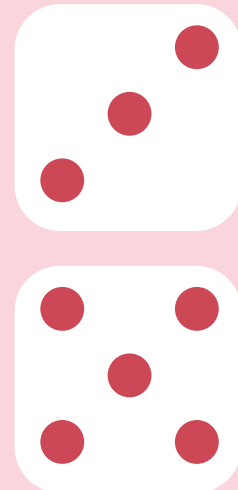
Veranderend patroon



Een rij of reeks met een stukje dat altijd verandert. De verandering is niet willekeurig, maar volgt een regel.

De regel in bovenstaande patronen is altijd een blaadje erbij of telkens 2 stippen erbij

Spatiaal structureel patroon



Geen rij of reeks, maar een vaste configuratie van elementen.

Herhalende patronen komen frequent aan bod in de kleuterklas bij het kralen rijgen of stempelen. Vaak moeten kleuters een herhalend patroon na-maken of verderzetten. Dat is goed, want herhalende patronen zijn belangrijk voor de wiskundige ontwikkeling. Zo zitten er heel wat herhalende patronen in getallen. Denk aan ons decimaal systeem met de tientallen en eenheden die herhaald worden en de afwisseling tussen even en oneven cijfers. Denk aan de basis van vermenigvuldigen, een vast groepje dat herhaald wordt: 1 groepje van 3 is 3, 2 groepjes van 3 is 6, 3 groepjes van 3 is 9, enz. Eenzelfde inzicht is nodig om later over verhoudingen en breuken te leren. Ook in de meetkunde is het begrip van een vaste eenheid die herhaald wordt belangrijk. Als we een bepaald gewicht of lengte meten, gebruiken we gram of meter (letterlijk een eenheid).

Veranderende patronen komen meestal aan bod als getallenreeksen of rekenen met sprongen in de lagere school. Denk aan het aanvullen van rijtjes zoals 2 4 6 8 of 50 40 30. Maar er bestaan ook veranderende patronen waarvoor geen cijfers nodig zijn en die al aan bod kunnen komen in de kleuterklas (zie figuur). In deze rijen verandert er systematisch iets: telkens een blaadje (🍂) erbij of telkens 2 stippen (••) erbij. Deze systematische verandering kunnen kleuters al herkennen en benoemen. Net als herhalende patronen kunnen we veranderende patronen relateren aan verschillende numerieke concepten, zoals de getalrij {1 2 3}, de even en oneven getallen {2 4 6 of 1 3 5}, de tafel van vermenigvuldiging {3 6 9}, enzovoort. Veranderende patronen kunnen ook de aanzet geven tot de eerste optel- en aftreke oefeningen: hoeveel krijg je als je er "altijd twee bijdoet" of "altijd ééntje wegneemt"?

Spatiaal structurele patronen zijn heel anders dan herhalende of veranderende patronen omdat ze geen rij of reeks vormen. Een spatiaal structureel patroon kan je dus niet verderzetten of voorspellen, het ziet er altijd hetzelfde uit. Je vindt deze patronen vaak terug in de kleuterklas onder de vorm van getalbeelden. Getalbeelden helpen bij het snel herkennen van een bepaalde hoeveelheid van elementen. Bijvoorbeeld :: je ziet meteen dat het 6 stippen zijn omdat je dit getalbeeld kent.

AAN DE SLAG MET PATRONEN IN DE KLEUTERKLAS: VIER TIPS

Kleuters komen in hun dagelijks leven in contact met patronen. Als leraar kan je hen hiervan bewust maken. Bovendien creëer je situaties die tot zinvolle leermomenten kunnen leiden.

Tip 1: Benadruk het onderscheid tussen patroon en rij

Waarom is dit belangrijk?

Er is een onderscheid tussen een patroon (of logische reeks) en een (willekeurige) reeks of rij. Dit onderscheid is belangrijk wanneer we in

de kleuterklas patronen bespreken of een activiteit

met patronen uitvoeren. Stel je volgende situatie voor: Een leraar toont tijdens een kringgesprek ■■■ en vraagt de kleuters hoe de rij verder gaat. De leraar gaat er van uit dat de kleuters begrijpen dat zij een patroon wil maken waarin het stukje "■■■" wordt herhaald en ziet daarom als enige juiste antwoord ▲(■■■, enz.). Maar deze le-

raar maakt dit niet expliciet. Daarom is elk ander antwoord ook correct want je kan deze rij op een heleboel manieren verderzetten, zowel op een willekeurige manier (bv. ■■■■■ of ■■■■■) als met een patroon (bv. ■■■■■, ■■■■■). Sommige kleuters zullen het woord patroon al kennen en zelfs gebruiken, maar weten ze ook echt wat het betekent? Als je impliciet blijft over patronen en de gevraagde regelmaat, kan je kleuters in verwarring brengen. Als je het woord patroon gebruikt en definieert – op niveau van de kleuters – kan je zorgen voor duidelijkheid. Sommige kleuters zullen zelf spontaan patronen maken of herkennen. Dit biedt goede aanknopingspunten als je wil werken rond patronen. Je kan met kleuters ook op "patroontocht" gaan, een zoektocht naar patronen in de klas, in de gang, op de speelplaats, en ook ver daar buiten. Wat zijn patronen, wat zijn geen patronen? Waarom wel of waarom niet?

Hoe doe ik dat in de klas?

In de klassituatie hierboven zijn er tal van mogelijkheden waarop je met kleuters kan reflecteren over de betekenis van een patroon en het verschil tussen een patroon en een rij. Denk aan de vragen:

- Wie kent er een *andere manier* om de rij verder te zetten?
- Wat is de *juiste manier* om de rij verder te zetten? Is er wel een juiste manier?
- Vormt een rij altijd een patroon?
- Hoe weet je of een rij een patroon vormt?
- Wat zou het patroon kunnen zijn?

Zulke reflecties kan je afstemmen op jouw kleuters. Zeker de oudste kleuters zijn al rijp om te praten over een patroon en de eenheid of regel van het patroon. Bovendien bieden patronen mooie kansen om het te hebben over herhalen, altijd opnieuw, meer, minder. Heel expliciet ingaan op dit onderscheid vergt van de kleuters vrij sterke verbale vaardigheden en al enig inzicht. Daarom lijkt dit eerder geschikt voor de oudste kleuters. Maar ook bij activiteiten met jongere kleuters kan dit al impliciet aan bod komen als je de termen rij (of reeks) en patroon consequent correct gebruikt. Als leraar kan je ook benadrukken dat bepaalde





rijen een herhalend patroon hebben en dat je daarom weet hoe deze verdergaan.

Je kan het onderscheid tussen een rij en een patroon ook expliciet aan bod brengen tijdens activiteiten. Je kan samen met kleuters patronen maken maar je kan ook vragen wie een rij kan maken waar géén patroon in zit. Of je kan kleuters vragen om patronen en rijen te sorteren. In de proeftuin in ons onderzoek werkten we met een mascotte (Toon Patroon) die veel patronen had en met een patroonmonster dat patronen door elkaar schudde. De kleuters moesten de rijen bij Toon Patroon (indien een patroon, links op het schema) of het patroonmonster (indien door elkaar geschudde rij, rechts op het schema) leggen (zie kader boven).

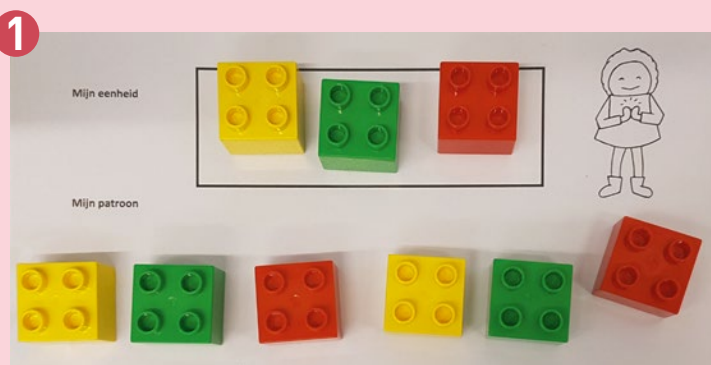
Tip 2: Creëer sterke activiteiten met herhalende patronen

Wat zijn sterke activiteiten?

Sterke activiteiten zijn activiteiten die de regelmaat of de structuur van het patroon benadrukken. Bij een herhalend patroon zit de regelmaat in de eenheid, het stukje dat altijd herhaalt. Hoe kunnen we inzicht in de eenheid stimuleren? Activiteiten met herhalende patronen komen al voor in de kleuterklas. Populaire patroonactiviteiten zijn het namaken, verderzetten of aanvullen van een patroon. Bij het namaken moet de kleuter een exacte kopie van een patroon maken, bijvoorbeeld een kralenketting maken met afwisselend een gele blok en een rode bol op basis van een voorbeeldprent. Bij het verderzetten van een patroon geeft de leraar de start van een patroon en maakt de kleuter het patroon verder af. Soms moeten kleuters een patroon aanvullen waaruit één of meer elementen verdwenen zijn. Deze activiteiten zijn leuk en zinvol maar leggen niet zoveel aandacht op de eenheid in het patroon.

Sterker de nadruk leggen op de eenheid

Sterker de nadruk leggen op de eenheid kan bijvoorbeeld tijdens het maken van een patroon **1**. In een kleuterklas is vaak heel wat concreet materiaal aanwezig waarmee kleuters vrij kunnen experimenteren, denk aan blokken, parels, loose parts, geometrische figuren. Dat vrij experimenteren kan je afwisselen met een gerichte opdracht: Wie kan een herhalend patroon maken? De leraar kan zelf een eenheid voorstellen of de kleuter vragen om eerst de eenheid te bepalen. Zo zijn de kleuters heel bewust bezig: 'Een herhalend patroon vraagt een eenheid, een stukje dat herhaald wordt. Eerst bepaal ik de eenheid, dan kan ik een herhalend patroon maken.' Wij werkten in de proeftuin met een werkblad waarop kleuters een patroon naar keuze konden maken met concreet materiaal, stempels of stickers. De kleuters leerden heel expliciet het woord "eenheid".



Een tweede voorbeeld is het vergelijken van patronen **2**. De leraar toont de kleuters twee patronen en vraagt wat hetzelfde en wat verschillend is. Je kan afwisselen tussen patronen met dezelfde elementen maar een verschillende eenheid (bv. AB- en AAB-patroon met hart en ster, bovenste twee patronen op de linker foto) en patronen met verschillende elementen maar dezelfde eenheid (bv. AAB-patroon met hart en ster versus ster en cirkel, onderste twee patronen op de linker foto). Omgekeerd kunnen kleuters zelf een rij maken met hetzelfde patroon als een voorbeeldrij, maar met andere elementen. De verschillende elementen kunnen gelijkaardig zijn (bv. geometrische figuren)

2



maar ook verschillend (bv. blokken, bewegingen, geluiden, dieren). Vergelijk de twee AAB-patronen op de linker foto en het AAB-patroon op de rechterfoto. Kleuters kunnen hetzelfde patroon ook omvormen tot een dans van "op op neer". In de proeftuin benoemden we de eenheid met letters (AB, AAB, ABC). Zo konden we op een meer algemene manier over patronen praten en patronen met verschillende elementen vergelijken. De kleuters konden benoemen waarom twee AAB-patronen met heel verschillende elementen toch gelijk waren en leerden ook nieuwe patronen maken met eenzelfde "naam". Dit werkte verrassend goed voor alle kinderen, al hadden sommigen iets meer tijd nodig om hier vlot mee overweg te kunnen.

Een derde voorbeeld is het voorspellen van een patroon **3**. Hierbij moeten kleuters niet gewoon het volgende element in de rij zoeken maar een element verschillende plaatsen verder. Denk bijvoorbeeld aan de opstelling in volgende figuur, waarbij je aan kleuters kan vragen wat er onder de laatste beker zit of wat er nog na de laatste beker moet komen. Door in de bekertjes hetzelfde patroon te stoppen (in dit geval AB), kan je hen ondersteunen.

3

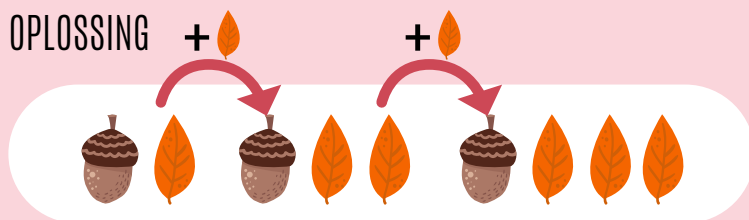


Je kan met kleuters ook op een vrij abstracte manier nadenken over een herhalend patroon. Dit kan tijdens een kringmoment met de hele groep of tijdens een één-op-één moment. Kleuters zetten zo hun eerste stappen richting verhoudingen, functies, en algebra (zie kader blz.7).

OPGAVE



OPLOSSING



Wat kan ik doen met spatiaal structurele patronen in de kleuterklas?

Vaak hangen de getalbeelden op in het klaslokaal en kunnen de kleuters deze vrij exploreren. Als je merkt dat sommige kleuters hier veel interesse in hebben, kan je deze getalbeelden samen bespreken. Denk bijvoorbeeld aan :::. Dit zijn 6 stippen, maar je kan het ook zien als 3 groepjes van 2 stippen (:) of 2 rijtjes van 3 stippen (...). Zo leren kleuters dat we hoeveelheden op verschillende manieren kunnen opsplitsen en dat $2 \times 3 = 3 \times 2$!

Tip 4: Patronen zitten overal!

Er zijn ontzettend veel materialen waarmee je patronen kan maken. Je kan patronen maken met concreet materiaal (bv. materiaal uit het bos, dozen, kralen) maar net zo goed op papier met stempels, stickers of door zelf een patroon te teken. Ook de kleuters zelf kunnen een patroon vormen (bv. jongen meisje jongen meisje) of ze kunnen patronen maken met bewegingen (op neer op neer) of geluiden (hip hoi hoi hip hoi hoi). Patronen passen dus in elk thema, in het klaslokaal, maar ook op de speelplaats, tijdens de turnles, de muziekles of tijdens een kookactiviteit (hmm, fruitsatés!).

KLAAR VOOR MEER PATRONEN IN JOUW KLAS?

We hopen dat we met deze bijdrage kleuterjuffen en -meesters inspireren voor een activiteit rond patronen. De activiteiten die we hebben verkend

in de proeftuin zijn alvast getest én goedgekeurd door vijf kleuterleraren en een honderdtal Vlaamse kleuters. De leraren waren enthousiast over de verschillende activiteiten en willen ze blijven gebruiken. Ook de kleuters waren enthousiast. Bovendien – zo leert ons onderzoek – hebben deze kleuters sterkere patroonvaardigheden ontwikkeld in vergelijking met kleuters die deze activiteiten niet aangeboden kregen. We wensen alle kleuterleraren en hun kleuters veel leuke en leerrijke momenten met patronen toe. Als je zelf aan de slag gaat met patronen, aarzel niet om ons op de hoogte te brengen van je ervaringen.

Voetnoot

Dit artikel is gebaseerd op een onderzoeksproject aan de KU Leuven (Wis & Co, https://ppw.kuleuven.be/o_en_o/CIPenT/wis-co-start) dat de patroonvaardigheden volgt van ongeveer 400 kinderen van de 2de kleuterklas tot het 1ste leerjaar. Om te onderzoeken hoe we inzicht in patronen kunnen stimuleren bij kinderen van de 3de kleuterklas werd een proeftuin ontwikkeld. Dit onderzoeksproject werd in 2016 gestart door doctoraatsstudent Nore Wijns, onder begeleiding van Joke Torbeyns, Lieven Verschaffel en Bert De Smedt.

Een praktijkonderzoek vanuit wiskunde

De kracht van een leerboog

Een leerboog opzetten, een zin die sinds kort onze lessen kruidt. Wij, vier docenten uit de UCLL-lerarenopleiding, zochten of die kon helpen om wiskundelessen beter te maken. We verdiepten ons in breuken, leerstof waarmee leerlingen én studenten worstelen. Ideaal materiaal voor een praktijkonderzoek. Carine Laeremans van top@punt in Geel en Tinne Rutten van de Twinkelaar in Elen deelden met veel plezier hun klas. Zo werden wij even juf in het zesde leerjaar.



LEREN IS WORSTELLEN

Het uitgangspunt van ons onderzoek is dat *iets leren* niet vanzelf gaat maar worstelen inhoudt.

Een leerboog is de periode van wroeten waarbij je evolueert van 'ik kan het niet' naar 'ik kan het'.

Het breukbegrip verwerven	
Inhoud	Een breuk nemen van een continu geheel/een eenheid. $\frac{3}{4}$ van een rechthoek, een cirkel, een taart ... Breuken nemen van aantallen komt nog niet aan bod.
Ik snap het	Het geheel verdeel ik in gelijke delen. De noemer geeft aan in hoeveel delen ik verdeel. De teller geeft aan hoeveel delen ik neem. Alle delen samen vormen het geheel .
Ik snap het goed	Ik begrijp het verschil tussen stambreuken en echte breuken, later onechte breuken.
Ik oefen	Ik oefen verschillende soorten voorbeelden. De vorm van het geheel, de waarde van de teller/de noemer, de manier van verdelen ... worden afgewisseld. Ook foute voorbeelden (bv. een niet gelijke verdeling) leveren inzichten op.
Ik gebruik	Ik gebruik breuken in vraagstukken, in metend rekenen ...

TEKST
Els Van Emelen

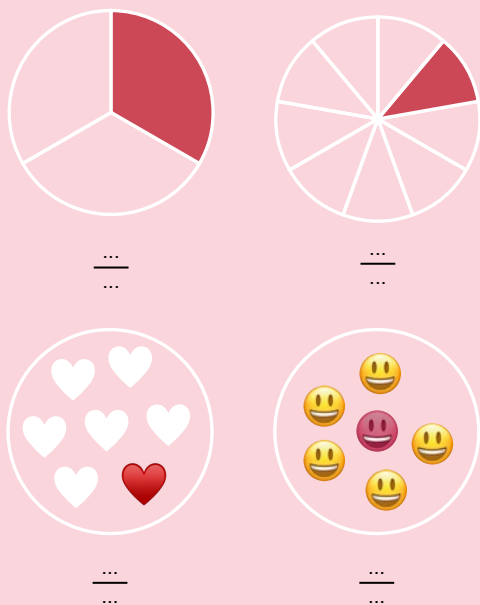
EEN GOEDE LEERBOOG

In de eerste fase van het onderzoek zochten we parameters die het opzetten van een goede leerboog in de hand werken of net bemoeilijken. Daarvoor namen we werkboeken van verschillende wiskundemethodes¹ door en gingen we in gesprek met de teams van de twee scholen

Heldere leerlijnen, onderscheiden concepten

Hier zie je een typische opgave voor het derde leerjaar. In deze fase ontdekken kinderen het breukconcept. Ze leren het geheel verdelen in gelijke delen, de betekenis van de teller en van de noemer.

Noteer de passende breuk



- ¹ Wiskanjers, Rekensprong Plus, Wiskidz, Zo gezegd Zo gerekend, zoWISO
- ² Voor dit project ontwikkelden we een volledige leerlijn voor rationale getallen. Interesse? Contacteer els.vanemelen@ucll.be

Merk op dat de opdracht twee soorten oefeningen bevat. Bij de bovenste opgaven zoek je de passende breuk als het geheel *continu* of *een eenheid* is. Bij de onderste opgaven is het geheel *een aantal*. Verschillende rekenboeken bieden beide concepten van bij het begin door elkaar aan. Dat lijkt ons verwarrend.

In de eerste graad leren kinderen een hoeveelheid verdelen: 'Ik heb zes snoepjes. Ik verdeel die over drie leerlingen. Ieder krijgt er twee.'

Een eenheid (zoals een taart) verdelen over drie leerlingen, kan niet met de gewone deling. De introductie van een breuk is een antwoord op dit probleem: 'Ik heb een taart, ik verdeel die in zes gelijke delen en ik neem er twee. Ik neem twee zesde van de taart.' Het aantal delen waarin de eenheid verdeeld is (de noemer) en het aantal delen dat je neemt (de teller) zijn hierbij de parameters.

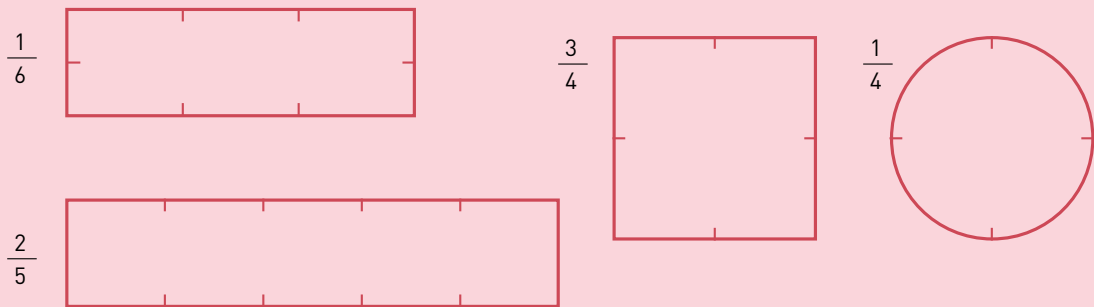
Pas wanneer je dit concept voldoende beheerst, is het tijd voor een nieuwe leerboog. Die begin je met een nieuwe probleemstelling: 'Kunnen we dit breukconcept gebruiken als het geheel een aantal is?' Je vertrekt in eerste instantie van een situatie waarbij je het aantal ook als eenheid kan opvatten: 'Neem $\frac{1}{3}$ van een reep chocolade.' Pas wanneer je je afvraagt hoeveel stukjes chocolade er in dat deel zitten, worden de aantallen relevant.

Verschillende concepten bied je best *gefaseerd in de tijd* aan. Leerlingen moeten een concept voldoende doorgronden vooraleer ze een nieuw verkennen. Daarvoor is een heldere leerlijn vanuit inhoudelijke concepten nodig². Dat principe kan het leren versterken. Maar er is ook een keerzijde. Als we de leerstof opsplitsen in zeer kleine stappen, worden die betekenisloos. Bijvoorbeeld lange tijd alleen met stambreuken werken, laat een facet van het breukbegrip (de teller) onderbelicht. We geloven dat het snel - zelfs van in het begin - werken met echte breuken, kinderen beter inzicht geeft.

Fouten maken moet

De opgave op de volgende pagina is een typische opdracht voor het derde leerjaar. De opdracht bevat een aantal waardevolle elementen. De vorm van het geheel is niet altijd dezelfde. Hierdoor groeit het besef dat de *vorm* waarvan we een breuk nemen, kan verschillen. Daarnaast zijn de waarden van de teller en de noemer telkens andere getallen. Dat helpt om de betekenis van de teller en de noemer te begrijpen.

Verdeel het geheel in gelijke delen en kleur het gevraagde



Toch is het leereffect bij deze opgave klein. Er kan weinig mislopen, zelfs als je nog niet veel van breuken begrijpt. Als je de streepjes verbindt, heb je automatisch de noemer goed én is het geheel netjes in gelijke delen verdeeld. Zonder de streepjes is de kans op fouten groter. Als je als leraar zegt: 'Oei, het is bij breuken wél belangrijk dat je verdeelt in *gelijke delen*', trekt je hierop de aandacht.

Het *maken van fouten, het fout laten lopen*, zorgt voor frictie in het leerproces. Het maakt helder wat nodig is voor een juiste oplossing en laat ontdekken waarop je moet letten. In plaats van

fouten te vermijden, is het beter om die doelbewust op te zetten. Het gesprek hierover is een waardevol hulpmiddel dat de essentiële elementen van de inzichten toont.

Laat leerlingen denken

De linkse opgave past in het zesde leerjaar en is een oefening op stijgingspercentages.

Het valt op hoe weinig woorden in de opgave staan en hoe sterk de oplossing is voorgestructureerd. Je zou kunnen zeggen dat de tabel de schematische vertaling is van het vraagstuk:

Op een zonnige dag rijden we door de bergen. We starten een lange beklimming. Langs de kant van de weg staat dit driehoekige verkeersbord. Hoeveel zullen we geklommen zijn nadat we 1500 m afgelegd hebben? En na 30.000 m?

Meer context gebruiken, geeft de situatie meer betekenis. Enkel tekeningen en tabellen aanbieden, verschaalt de opdracht tot het uitvoeren van berekeningen.

Het vraagstuk oplossen, vraagt veel denkwerk:

1. Welke begrippen spelen mee bij stijgingspercentages? (hoogteverschil en afgelegde weg)
2. Wat betekent een stijgingspercentage van 20%? (100 m afleggen is 20 m stijgen)



3. Zijn dit recht evenredige grootheden? (Als de weglengte verdubbelt, verdubbelt ook de stijging. Een verhoudingstabel kan helpen.)
4. We hebben geen 100 m afgelegd maar 1500 m. Hoe berekenen we het hoogteverschil? (afgelegde weg x 15, dus hoogte x 15)

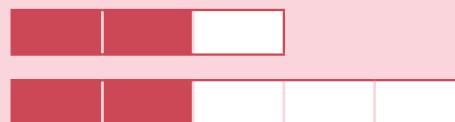
De voorstructurering zorgt ervoor dat leerlingen over verschillende van deze denkstappen niet moeten nadenken. Ze hoeven zich niet af te vragen welke begrippen meespelen, of ze recht evenredig zijn, wat dat betekent, of een tabel kan helpen ... Vaak kiezen we met de beste bedoelingen voor werkboeken met voorstructurering: om geen tijd te verliezen met het tekenen van een tabel, om ervoor te zorgen dat meer leerlingen de opgave juist oplossen, om fouten te vermijden ... Zonder dat we er stil bij staan, nemen we echter een groot deel van *het denken* of *het worstelen* weg. En net dat is nodig om te leren.

Als je door de werkboeken bladert, valt op hoeveel al klaar staat en hoe weinig ruimte de leerlingen krijgen om zelf te denken. Misschien is dit wel een belangrijke oorzaak waarom het zoveel moeite kost om wiskunde te leren.

Meer woorden, scherpere beelden

Tot het vierde leerjaar werken leerlingen steeds met benoemde breuken. Ze leren dat de grootte van het deel samenhangt met het geheel. Je kan

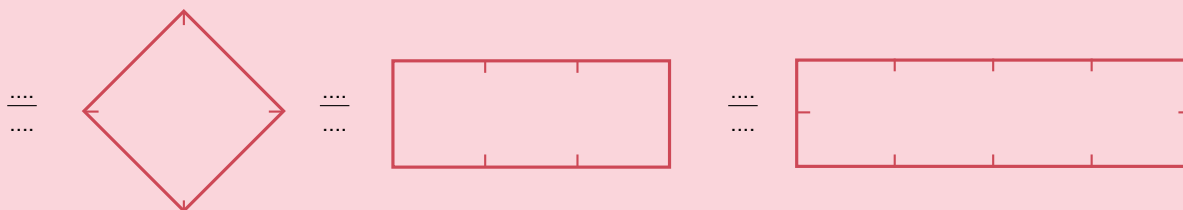
hen boeiende facetten laten ontdekken. Zo zie je op de figuur dat $\frac{2}{3}$ van de eerste rechthoek evenveel is als $\frac{2}{5}$ van de tweede rechthoek.



Toch schrijven we nooit $\frac{2}{5} = \frac{2}{3}$. Dit soort notaties hoort thuis in het concept 'breuk als rationaal getal' waar we werken met onbenoemde breuken. Het zijn dan getallen tussen de andere getallen. Zoals we twee altijd als het dubbel van één opvatten, vergelijk je breuken vanaf nu ook met één. De afspraak dat je onbenoemde breuken van *hetzelfde* geheel neemt, verwoorden we zelden of nooit. Ervaren breukengebruikers vinden het vanzelfsprekend en laten voor de eenvoud dat stukje zin weg. Dat heet onvolledige verwoording. Stel jezelf maar eens de vraag wanneer je nog zei: 'Is $\frac{1}{3}$ groter of kleiner dan $\frac{1}{2}$ *wanneer we de breuk van hetzelfde geheel nemen?*'

Een leerling die het niet snapt, heeft deze woorden nodig om het goed te begrijpen. Stel je voor dat je in die situatie bent en de onderstaande opgave aangeboden krijgt en je vastloopt op de opgave $\frac{1}{4} \dots \frac{1}{3}$.

Verdeel het geheel in gelijke delen en kleur telkens 1 deel. Noteer de breuk.



Vul in: < of > $\frac{1}{3} \dots \frac{1}{2}$ $\frac{1}{4} \dots \frac{1}{3}$ $\frac{1}{4} \dots \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \dots \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2} \dots \frac{1}{3}$

Je leerde dat een tekening in moeilijke situaties helpt. Van de twee rechthoeken uit de opgave kan je gemakkelijk een vierde en een derde nemen. Op basis van de tekeningen zou je kunnen besluiten dat beide breuken even groot zijn. Als leraar zijn we vaak slordig en gebruiken we rechthoeken, getallenassen, cirkels ... door elkaar zonder dat we uitleggen hoe de tekening het inzicht ondersteunt.

BLOK 3

7. Breuken, kommagetallen en percenten (1)

8. : tot HD (1)
9. X tot HD (2)
10. Oppervlakte en omtrek van parallellogram, driehoek en ruit
11. Oriëntatie
12. Logische operatoren en/of/niet

BLOK 4

1. Deelbaar door 3 en 9
2. Percent (begripsinvulling)
3. : tot HD (2)
4. Schaal
5. Vlakke figuren classificeren
6. Negatieve getallen
7. Tabellen, grafieken en diagrammen
8. X en : tot d
9. Een kommagetal als quotiënt
10. De 4 bewerkingen tot d (herhaling)
11. Omstructureren

BLOK 5

1. Herstructureren en rekentaal
2. Delen met rest
3. Problemen oplossen op verschillende manieren
4. Omtrek en oppervlakte veelhoek
5. Breuk als verhouding
6. De cirkel
7. Breuken, kommagetallen en percenten (2)

Niet spreiden maar concentreren

Het verband tussen breuken, kommagetallen en percenten is een onderwerp van het vierde leerjaar. We zochten in werkboeken naar lessen hierover.

Hiernaast zie je een overzicht van een concrete lessenreeks. De lessen zijn gegroepeerd in blokken. Er zijn een vijftal lessen per week

Les 7 in blok 3 gaat over breuken, kommagetallen en percenten. Stel dat je een leerling bent die de leerinhoud *bijna* begrepen heeft (ik snap het nog niet goed). Als je scherp kijkt, komt de leerstof pas 23 lessen later (blok 5, les 7) opnieuw aan bod. Ondertussen is er rond erg diverse onderwerpen gewerkt. De kans is groot dat de leerling tegen dan veel vergeten (alles?) is van wat hij in de eerste les bijna begrepen had.

Voor het opzetten van een goede leerboog is het belangrijk dat je binnen een beperkte tijdspanne (een of twee weken) minstens drie keer met dezelfde leerstof werkt om die te kunnen verwerven en vast te zetten. Dat betekent dat je de leerstof niet spreidt maar concentreert. Goede leraren vangen dit zelf op. Met de huidige werkboeken is dat erg lastig. De leerstof is in schijnbaar willekeurige delen gehakt. Dit maakt het moeilijk om een degelijke leerboog op te zetten.

VRIJHEID DURVEN NEMEN

Na de analyse van de werkboeken, klasbezoeken en gesprekken, kriebelen onze vingers. We willen zelf initiatief nemen! Juf Carine en juf Tine maken ruimte in hun planning om samen op onderzoek te gaan. We ontwikkelen materiaal, bereiden lessen voor en worden voor één week juf in het zesde leerjaar³.

Een helder concept kiezen

We leggen de lessen die nog op het programma staan naast onze leerlijn van rationale getallen. We zoeken een onderwerp waar de leerlingen nog maar weinig over geleerd hebben en dat we kunnen samenballen tot een groter geheel. Zo zorgen we voor een geconcentreerde leerboog van 3 keer 2 uur. Na wat zoekwerk vinden we voldoende materiaal dat past in het concept 'Breuk als verhouding, absoluut en relatief vergelijken'.

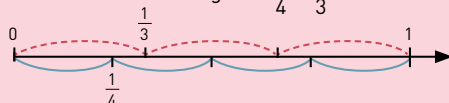
³ In dit artikel illustreren we onze ideeën aan de hand van het materiaal dat we bij juf Carine uitprobeerden.

Dit is de derde stap in het vergelijken van breuken. Even situeren:

1. Een breuk hangt samen met het geheel (breukbegrip verwerven):
Scherp gesteld kan $\frac{1}{2}$ van rechthoek 1 even groot als $\frac{1}{3}$ van rechthoek 2 zijn.



2. Breuken vergelijken als het geheel gelijk is (breuk als rationaal getal) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$



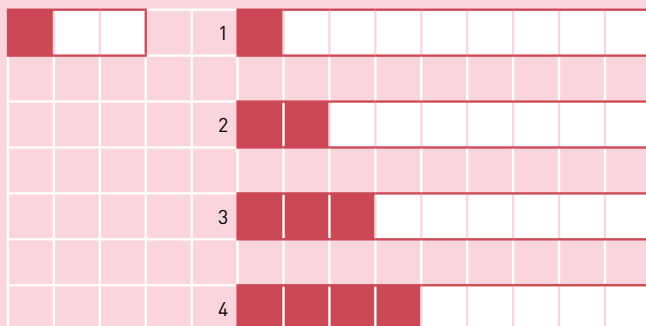
3. Breuken vergelijken als het geheel verschillend is (breuk als verhouding)
 - Een vaste verhouding tussen verschillende gehelen. Bv. twee kettingen met een verschillend aantal kralen. Bij beide kettingen zijn $\frac{1}{3}$ van de kralen blauw.
 - Relatief vergelijken. Bv. in school A komen relatief meer leerlingen met de fiets dan in school B.

De problemen op tafel

We starten de lessenreeks met een klassikale instructie van een half uur. Bij zo'n instructie heb je het voordeel dat leerlingen die de problemen snel doorzien, de groep vooruit kunnen helpen met hun inzichten. De ideale setting om leerlingen uit te dagen. Met het volgende probleem willen we het denken bij de leerlingen leggen en de moeilijkheden op tafel krijgen.

'Welke rechthoek past bij het rechthoekje aan de linkerkant?' (zie onderstaande figuur)

We hopen dat de kinderen verschillende antwoorden kiezen zodat we die kunnen bespreken.



Tot onze verrassing kiezen ze collectief voor optie 3. Ook bij ons loopt het soms fout. Blijkbaar leidt intuïtie spontaan naar het kiezen van dezelfde verhoudingen. We laten dat niet aan ons hart komen en stellen zelf alternatief 1 voor. Op die manier krijgt het verschil tussen absoluut en relatief vergelijken toch de nodige aandacht.

Het witte blad: soberheid als troef

We kiezen voor opgaven zonder voorstructurering en bieden sober geformuleerde vraagstukken aan.

1. In het zesde leerjaar van top@punt zitten 22 leerlingen. Dit is een milieubewuste klas. Ze gaan nog niet naar de klimaatbetogingen maar er komen wel al 8 leerlingen met de fiets, de bus of te voet naar school.

In het zesde leerjaar van de Twinkelaar zitten 33 leerlingen. Zij doen het nog beter. In deze klas komen wel 10 leerlingen naar school zonder de auto te gebruiken. Wat denk je over deze stelling?

2. In het zesde leerjaar van top@punt zitten 22 leerlingen. Dit is een milieubewuste klas. Ze gaan nog niet naar de klimaatbetogingen maar er komen wel al 8 leerlingen met de fiets, de bus of te voet naar school.

In het zesde leerjaar van de Twinkelaar zitten 33 leerlingen. Deze leerlingen zijn ambitieus en willen het graag relatief beter doen dan top@punt. Hoeveel leerlingen moeten er dan zonder de auto te gebruiken naar school komen?

We noemen dit *de strategie van het witte blad*. We bouwen dit op met *voordoen* tijdens de klassikale instructie, daarna *samen* per twee en *alleen doen* in de verwerkingsfase.

Hierbij is het gebruik van een algemene heuristiek (gegeven, gevraagd, tekening, oplossing, controle) een nodige vaardigheid. Samen werken we de twee voorbeeldopgaven uit. Die blijven de hele les op het bord zodat we hier telkens naar kunnen verwijzen.

Van een schema naar een breuk

We bieden twee manieren aan om de vraagstukken op te lossen: met een ondersteunend schema of abstract met breuken. Beide methodes brengen we aan in de klassikale instructie, we laten het verband tussen beide zien. Kinderen krijgen zo de kans om van een schema door te groeien naar een abstracte werkwijze:

Vergelijken met een verhoudingstabel			
top@punt	geen auto	8 ll.	24 ll.
	totaal	22 ll.	66 ll.
Twinkelaar	geen auto	10 ll.	20 ll.
	totaal	33 ll.	66 ll.
Vergelijken met breuken			
top@punt	$\frac{8}{22} = \frac{24}{66}$	$>$	$\frac{20}{33} = \frac{10}{16.5}$ Twinkelaar

Intensief en gericht oefenen

De rest van de tijd (5,5 uur) is oefentijd waarbij wij de leerlingen individueel of in groepjes begeleiden.

Bij het ontwikkelen van het materiaal vertrekken we van een aantal ideeën.

We zoeken véél opgaven. Alle opgaven gaan over breuk als verhouding zodat de hele klas met dezelfde leerstof bezig is en de gemeenschappelijke instructie rendeert. Het is niet de bedoeling dat de leerlingen al deze opdrachten oplossen. Dit geeft de leraar een keuze: wie maakt welke opdrachten en hoeveel tijd wil ik in dit onderwerp investeren. Na overleg met juf Carine delen we de klas op in drie groepen. Elke groep krijgt een andere selectie van opgaven om op te lossen. De selectie sluit aan bij hun uitdagniveau. We geven geen voorstructurering maar zorgen voor sobere opgaven zoals in de instructie. Af en toe is een tekening nodig om een opgave te verduidelijken. De leerlingen krijgen ruitjesbladen om de opgaven op te lossen.

We ordenen de opgaven in drie reeksen. De eerste reeks oefent het basisinzicht met gelijkaardige opgaven aan de instructie. De tweede reeks bevat opgaven die verdiepend zijn met nieuwe contexten, omgekeerd redeneren en andere formuleringen. De derde reeks bevat behoorlijk moeilijke opgaven met minder evidente wiskundige inhoud.

Reeks 1

1. Fanny versiert een kroon. Voor elke stersticker plakt ze drie 😊-stickers op de kroon. Ze gebruikt in totaal 8 sterstickers. Hoeveel 😊-stickers heeft ze nodig?
2. De nieuwe STAR WARS film loopt. In zaal Kine zijn 180 van de 240 plaatsen bezet, in zaal Star zijn er dat 200 van de 250. Welke zaal is relatief het best bezet?

Reeks 2

1. Michèle maakt een kransenketting. Het aantal roze parels dat ze gebruikt is $\frac{1}{4}$ van het aantal paarse parels. De hele ketting bestaat uit 60 parels. Hoeveel roze en hoeveel paarse parels gebruikt ze?
2. In De Zon zijn 360 leerlingen ingeschreven. De verhouding tussen het aantal jongens en het aantal meisjes is 4 op 5. Hoeveel meisjes zijn er meer dan jongens?

Reeks 3

1. De zwemclub kende een toename van zwimmers: eerst waren er 50 leden. Nu zijn er 12 bijgekomen. De voorzitter van de voetbalclub is ook blij want zijn ledenaantal nam met $\frac{1}{5}$ toe en kent nu 120 leden.
 - a) Welke club kende absoluut de grootste stijging?
 - b) Van welke club was de procentuele toename het grootst?
2. Margot zegt: "In absolute cijfers gaan er meer leerlingen van 6A basketten dan van 6B, maar relatief gezien zijn het er minder. In 6A zitten 24 leerlingen en in 6B zitten 18, waarvan er 6 basketten." Hoeveel leerlingen spelen basket in 6A?

POSITIEVE SIGNALEN

De lessen waren intensief en rijk. Kleine signalen gaven ons een positief beeld. Alle leerlingen worstelden. Ook leerlingen die snel wiskundige inhouden verwerven, ervoeren hoe het is om iets niet te kunnen.

In zes uur merkten we een grote vooruitgang om met 'een wit blad' te werken. Van copy/paste zag je leerlingen groeien naar het noteren van wat nodig was: 'juf, hier maak ik geen tekening want die staat al in het boek' of 'ik schrijf mijn gegevens op de figuur, dat is duidelijker'.

Leerlingen die moeite hebben met wiskunde, hadden het meeste baat bij het werken met een wit blad. Fier losten zij een opgave van reeks 3 op.

Leerlingen die wiskunde gemakkelijker verwerwen, toonden het meeste weerstand voor het werken met een heuristiek. Zij beperkten zich tot snel noteren van enkele berekeningen. Pas op het moment dat zij moeite kregen met de opgaven (reeks 3), konden we ze het voordeel laten ervaren.

Door op korte termijn herhaaldelijk en intensief met de leerstof bezig te zijn, hadden de leerlingen het gevoel dat ze de leerstof 'door' kregen. Van sommige zinnen werd je als leraar gelukkig: 'juf, ik doe dat met die tabel want dat snap ik beter', 'ik doe dat even snel met die breuken', 'ik snap nu wat ik fout doe' of 'het boek zegt het al voor hé'.

Ook wij leerden bij: eerst zagen we kinderen kribbelen op lege plekkjes in hun kladschrift en het overzicht verliezen. Daarom zorgden wij voor lege witte bladen en later voor ruitjespapier. Juf Carine besliste om volgend jaar met een wiskundeschrift te werken. Ze proefde van de vrijheid die dat haar gaf.

ZELF STAPPEN ZETTEN

Materiaal ontwikkelen dat het opzetten van leerbogen beter ondersteunt, is intensief en niet gemakkelijk. Dat ondervonden we zelf. Toch kan

je met een beperkte investering al enkele initiatieven nemen:

1. Verwijder zoveel mogelijk voorstructurering. Leg op die manier het denken bij de leerlingen.
2. Laat het fout lopen! Bespreek met leerlingen waarom het fout is en wat er nodig is voor een juist antwoord.
3. Maak een jaarplan waarin je lessen over eenzelfde leerinhoud binnen een korte tijds-spanne groepeer per onderwerp. Werk twee à drie keer per jaar intensief rond dezelfde leerinhoud. (Sommige leerinhouden, zoals de tafels, oefen je uiteraard doorheen het hele jaar vaak en kort.)
4. Per lesonderwerp voorzie je een instructie voor de hele groep, gevolgd door individueel inoefenen met opdrachten op verschillende niveaus.
5. Zoek waar jouw leerinhouden passen binnen een leerlijn vanuit concepten. Overleg met collega's op welke onderwerpen jij belangrijke focussen legt.

We wensen je even boeiende ervaringen als de onze!

Voetnoot

Dit artikel is gebaseerd op 'Impulsonderzoek: de kracht om een goede boog te spannen' van Michèle Dexters, Liesbeth Lefèvre, Veerle Martens, Els Van Emelen, wiskundedocenten UCLL-lerarenopleiding basisonderwijs Limburg, verbonden aan de expertisecentrum 'Art of Teaching' UCLL.